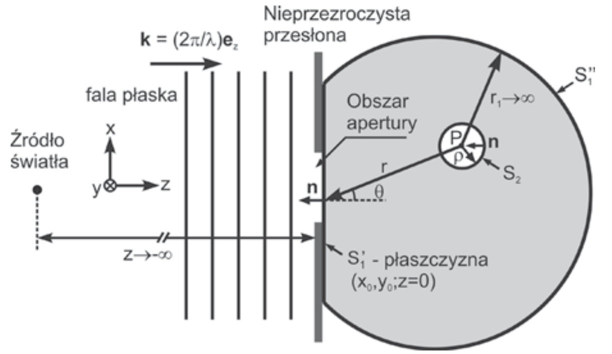

Rys. 7.7. Obszar przestrzeni, w którym szukamy wartości amplitudy pola $E(P)$ w punkcie obserwacji P, z powierzchniami S_1', S_1'', S_2 branymi pod uwagę w podejściu Kirchhoffa do problemu dyfrakcji na aperturze

Zgodnie z ideą Kirchhoffa w celu znalezienia rozwiązania równania (7.24) w konfiguracji jak na rys. 7.7 korzysta się z twierdzenia (tożsamości) Greena (zob. Dodatek A – wzór (A19))

$$\oint_S \left(U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right) \mathrm{d}S = \int_V \left(U_1 \nabla^2 U_2 - U_2 \nabla^2 U_1 \right) \mathrm{d}V \,, \tag{7.25}$$

gdzie $U_1(x, y, z)$, $U_2(x, y, z)$ oznaczają dwie dowolne analityczne funkcje skalarne określone w obszarze o objętości V zamkniętej gładką powierzchnią S; $\partial U/\partial n$ oznacza pochodną w kierunku normalnego wersora zewnętrznego względem powierzchni S.

Jeżeli brać pod uwagę obszar jak na rys. 7.7, to na podstawie twierdzenia Greena można oczekiwać, że amplituda pola E w danym punkcie P wynika ze stanu wszystkich drgań pola zawartych w objętości V. Jak zobaczymy, odpowiednio wybierając funkcję U_2, amplituda $E(P)$ będzie zależeć od stanu drgań jedynie na powierzchni otaczającej S, a następnie daje się zredukować tylko do punktów na powierzchni apertury, jak to postuluje zasada Huygensa-Fresnela.

Jedna z funkcji skalarnych opisuje szukany rozkład pola elektrycznego, czyli $U_1(x, y, z) = E(x, y, z)$, jako drugą (pomocniczą) funkcję przyjmujemy $U_2(x, y, z) = \exp(ikr)/r$, gdzie r oznacza odległość od dowolnego punktu obszaru do punktu P.

Można podać trzy argumenty[9] za wyborem takiej postaci funkcji U_2:

9 Pomijając argument post factum, iż z pomocą takiej funkcji problem dyfrakcyjny udaje się rozwiązać.

(a) funkcja ta spełnia równanie falowe (7.24), jako że opisuje falę sferyczną „wychodzącą" z badanego punktu. W związku z tym, że obie funkcje U_1 i U_2 są rozwiązaniami równania falowego, prawa strona wzoru (7.25) staje się równa zeru, ponieważ

$$\int_V \left(U_1\nabla^2 U_2 - U_2\nabla^2 U_1\right)\mathrm{d}V = \int_V \left(-k^2 U_1 U_2 + k^2 U_2 U_1\right)\mathrm{d}V = 0\,, \tag{7.26}$$

(b) w granicy przy $r \to \infty$, wartość funkcji $U_2(\infty) \to 0$,

(c) nawiązuje do zasady Huygensa-Fresnela, iż pole w danym punkcie jest wypadkową superpozycją cząstkowych fal sferycznych z wirtualnych źródeł.

Dla określonych wyżej funkcji skalarnych, uwzględniając (7.26), wzór Greena zapisujemy w postaci

$$\oint_S \left(E\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r} - \frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r}\frac{\partial E}{\partial n} \right)\mathrm{d}S = 0 \tag{7.27}$$

Zauważmy, że obliczanie całki w punkcie P oznacza przyjęcie $r = 0$, ale wówczas funkcja $U_2(r = 0) \to \infty$. Aby uniknąć osobliwości, eliminujemy punkt P, otaczając go małą sferą o promieniu ρ, tak że rozważany obszar V ma teraz wyciętą kulistą wnękę, a rozważana powierzchnia S składa się teraz z dwóch powierzchni (patrz rys. 7.7): S_1 (dużej) i S_2 (małej). Uwzględniając, że $S = S_1 + S_2$, z (7.27) mamy

$$\oint_{S_1} f(E,r)\mathrm{d}S = -\oint_{S_2} f(E,r)\mathrm{d}S\,. \tag{7.28}$$

Jeżeli wykonać rachunki i obliczyć całkę po prawej stronie (7.28)[10] dla granicznej powierzchni sferycznej $S_2 = 4\pi\rho^2$ przy $\rho \to 0$, to otrzymujemy bardzo prosty wynik

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{S_2} f(E,r)\mathrm{d}S = -4\pi E(P)\,. \tag{7.29}$$

Po podstawieniu (7.29) do (7.28) uzyskuje się szukane pole w punkcie P dane wyrażeniem

$$E(P) = \frac{1}{4\pi}\oint_{S_1}\left(\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r}\frac{\partial E}{\partial n} - E\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r} \right)\mathrm{d}S\,. \tag{7.30}$$

Równanie (7.30) nazywane jest *twierdzeniem całkowym Kirchhoffa* lub *Helmholtza-Kirchhoffa*. Jest to podstawowe twierdzenie skalarnej teo-

10 Stosujemy w tym celu współrzędne sferyczne i całkujemy po kącie w granicach 0, 2π.